Il calcolo a scuola, ovvero: l'inizio di un cambiamento epocale[1]

Gianfranco Arrigo[2]

The problem of the teaching of calculus – in particular of the numerical calculus – in our schools is presented in the light of the new reality, represented by the coming and the important development of the new computer technologies. Should we introduce the pocket calculator already in our primary school classes? Should we make use of the computer as a normal tool to learn mathematics at school? These are the two underlying questions to which one tries to reply in this first part of the paper.

Parte prima: il calcolo numerico

1.1. Il tramonto dei procedimenti di calcolo in colonna

Non v'è dubbio che, oggi, gli algoritmi del calcolo scritto – quelli arabici, per intenderci – detti anche «calcoli in colonna» dai nostri allievi della scuola primaria, hanno perso gran parte della loro importanza. È rarissimo vedere applicate ancora, sui posti di lavoro o nelle economie familiari o in qualsiasi altro posto, queste tecniche di calcolo. Quasi tutti riconoscono di aver eseguito simili operazioni soltanto a scuola. Poi, basta. Se si entra nei particolari e si verifica la capacità di eseguire le singole operazioni aritmetiche in colonna da parte della odierna popolazione attiva, ci si accorge che l'addizione e la moltiplicazione sono ancora eseguite con sufficiente padronanza, mentre la sottrazione e ancor più la divisione difficilmente vengono portate a termine senza errori. Se poi si chiede a qualcuno di giustificare una caratteristica importante di questi algoritmi, la risposta più frequente è: «perché così mi hanno insegnato».

Può essere utile ricordare che tali algoritmi di calcolo furono introdotti alle nostre latitudini da Leonardo Pisano, detto anche Fibonacci (~1180-~1250), per il tramite del suo importantissimo *Liber abaci*. La loro introduzione costituì una prima grande rivoluzione nel modo di calcolare e cancellò praticamente dalla terra la professione di abachista, cioè di chi metteva a disposizione a pagamento la propria abilità nel manipolare l'abaco, strumento di calcolo che nella forma più rudimentale era costituito da una tavoletta di legno suddivisa in compartimenti, sulla quale si muovevano dei sassolini (calcolo = sasso). La grande novità portata da Leonardo Pisano fu la numerazione

1. L'articolo è la rielaborazione di un testo distribuito agli insegnanti di matematica delle scuole medie del Canton Ticino nell'ambito del corso di aggiornamento dedicato al problema dell'insegnamento del calcolo.
2. Il testo è stato discusso dagli esperti per l'insegnamento della matematica, che ne ha approvato le grandi linee.

in base dieci; il calcolo in colonna fu solo la conseguenza di ciò. La sostituzione dello scomodissimo e primitivo sistema di numerazione romano con quello arabico, posizionale in base dieci, e l'introduzione degli algoritmi del calcolo in colonna misero mercanti, contabili, agrimensori e quant'altri nella felice situazione di poter fare da sé i calcoli, guadagnando soldi, tempo e… discrezione. Questo succedeva nel Medioevo e questo succede ancora oggi, alle soglie del duemila, nelle nostre scuole.

Ben diversa è la situazione sui posti di lavoro: nessuno calcola più in questo modo. La venditrice, un tempo maestra nell'eseguire addizioni e sottrazioni in colonna, oggi usa la cassa registratrice automatica, che stabilisce l'importo totale, il resto e, se necessario, lo sconto speciale; usa pure la bilancia automatica, che determina con estrema precisione la quantità e il prezzo della merce pesata. La casalinga, quando le occorre recarsi all'ufficio postale per eseguire dei pagamenti (per esempio a fine mese), usa la calcolatrice. Sui posti di lavoro e nelle economie familiari troviamo sempre più il *personal computer*, mentre per eseguire calcoli importanti e complicati si ricorre al centro di calcolo.

È quindi giunto il momento che la scuola prenda in considerazione seriamente il problema del calcolo in colonna e si ponga senza mezzi termini la domanda se ha ancora senso, alle soglie del duemila, insegnare a padroneggiare gli algoritmi relativi. Aggiungiamo che da qualche decennio, a più riprese, si sono introdotti nuovi contenuti nei programmi di matematica, senza togliere granché. Non crediamo di dire il falso affermando che gli attuali programmi di matematica delle nostre scuole hanno ormai raggiunto il limite massimo per quel che riguarda la quantità di contenuti previsti, per cui togliere qualcosa di ingombrante potrebbe essere un'operazione tutt'altro che negativa. Per esperienza sappiamo però quanto sia difficile e delicato proporre simili cambiamenti, per cui occorre esaminare la problematica con la dovuta attenzione.

Vorremmo dapprima richiamare alla memoria del lettore un fatto avvenuto pochi lustri or sono nei programmi di matematica degli istituti superiori: la scomparsa repentina del calcolo numerico eseguito con l'ausilio delle tavole dei logaritmi e delle tavole trigonometriche. Chi è passato di lì ricorderà sicuramente il tempo trascorso applicando i logaritmi a una determinata espressione numerica, sfogliando le pagine delle tavole alla ricerca della giusta combinazione di cifre, operando interpolazioni da brivido per ottenere la quinta o la sesta cifra significativa e infine risalendo dal valore del logaritmo (o della funzione trigonometrica) a quello del suo argomento, quasi sempre da determinarsi con almeno una cifra significativa in più di quelle leggibili direttamente o con tanto di gradi, primi e secondi. Tali procedimenti non erano certamente dei più semplici e inoltre, per diventare efficaci, gli allievi dovevano sottoporsi a un allenamento non indifferente.

È bastata la comparsa delle prime calcolatrici elettroniche tascabili, per decretare la fine di questa pratica di calcolo. Le famose *Tavole logaritmiche e trigonometriche* (conosciutissime in Svizzera quelle dette «del Voellmy») furono ben presto trasformate in *Tavole numeriche e formulario* e le pagine dedicate in precedenza alle tavole dei logaritmi e a quelle trigonometriche furono impiegate per altri tipi di tavole numeriche: tavole di distribuzioni di probabilità, tavole degli interessi composti e via dicendo. Nessuno inveì contro questo cambiamento, a quanto ci consta. Tutti si adattarono all'uso della calcolatrice nella scuola superiore: qualcuno con entusiasmo, altri con indifferenza, altri ancora con lo spirito di chi è obbligato ad accettare suo malgrado.

Nel frattempo, l'uso della calcolatrice tascabile si è esteso a tutta la popolazione, scolastica e no. La decisione del 10 novembre 1981 con la quale lo Stato del Canton Ticino autorizzava l'uso di questo strumento **a partire dalla terza media**, sicuramente artificiosa ma anche giustificata per quel tempo, appare oggi indifendibile: calcolatrici e computer fanno sempre più parte degli oggetti familiari agli allievi, anche giovanissimi, e quindi la scuola non può più operare alcun tipo di chiusura. Non si può accettare che gli allievi del primo biennio lavorino a casa con la calcolatrice sul tavolo e a scuola con la calcolatrice sotto il banco!

A questo punto occorre chiedersi quale potrebbe essere l'impatto dell'introduzione della calcolatrice già nel primo biennio della scuola media o addirittura nella scuola primaria. Così come l'apparizione degli algoritmi del calcolo in colonna nel tardo Medioevo soppiantò gli abachi, vincendo la fiera opposizione degli insegnanti, un'introduzione precoce della calcolatrice nella scuola segnerebbe a sua volta la fine dell'apprendimento del calcolo in colonna. Questi algoritmi potrebbero essere collocati definitivamente nel museo della matematica tra gli abachi e le prime macchine calcolatrici.

Stiamo però parlando di scuola, occorre quindi tenere conto di quello che si perderebbe dal profilo formativo, operando la sostituzione ipotizzata. Non c'è dubbio che l'apprendimento delle tecniche di calcolo in colonna tocca gli aspetti fondamentali dell'aritmetica delle quattro operazioni. In particolare sfrutta le proprietà commutativa, associativa e, soprattutto, distributiva della moltiplicazione nei confronti dell'addizione (e della sottrazione). Queste proprietà, però, non sono esclusive del calcolo in colonna: su di esse si fonda anche il calcolo mentale. Eccoci giunti al problema chiave della nostra proposta: introdurre la calcolatrice già in prima media, eliminare di conseguenza la ripresa del calcolo in colonna, rinforzare il calcolo mentale.

La soluzione sembrerebbe praticabile ma, per essere capiti fino in fondo, dobbiamo precisare che cosa intendiamo con l'espressione «rinforzare il calcolo mentale».

1.2. Rinforzare il calcolo mentale

Per calcolo mentale intendiamo tutto il calcolo eseguito senza l'ausilio di alcun mezzo tecnologico, all'infuori, eventualmente, del tradizionalissimo binomio: foglio di carta e matita. La pratica del calcolo mentale si basa sulla conoscenza ben fondata almeno delle quattro operazioni dell'aritmetica, in particolare delle proprietà associativa, commutativa e distributiva. Si sviluppa soprattutto operando attività di analisi e di sintesi e si nutre continuamente con l'intuizione e a volte anche con l'invenzione. Il calcolo mentale è praticato soprattutto con i numeri naturali, ma può essere esteso ai razionali.

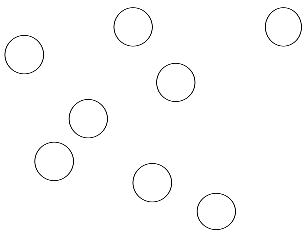
L'abilità nel calcolo mentale dipende anche dalla conoscenza che il soggetto ha dei numeri naturali (divisori, multipli, numeri primi, quadrati perfetti, proprietà particolari).

Non tutti i calcoli si prestano ad essere eseguiti mentalmente. Se non è il caso, si ricorre alla calcolatrice: il calcolo mentale allora serve a stimare/verificare il risultato dato dalla macchina.

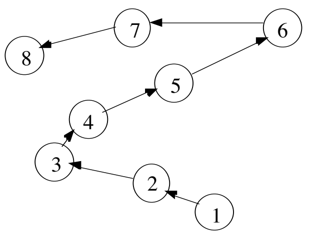
Il calcolo mentale dev'essere una conquista graduale dell'allievo, non un'imposizione: per questo occorre esercitarlo in situazioni in cui è complementare all'uso della calcolatrice.

1.2.1 L'addizione

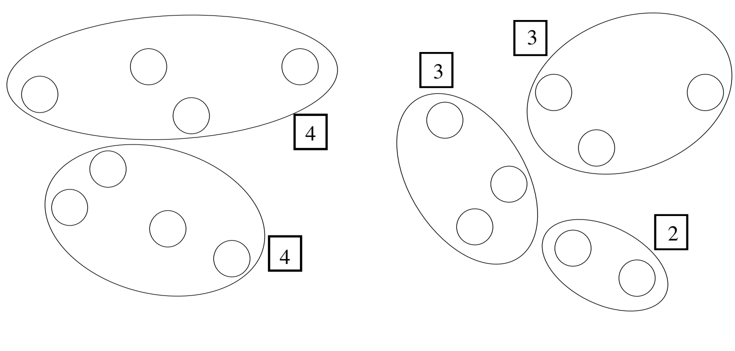
Nel calcolo mentale, l'addizione è l'operazione basilare, dalla quale si sviluppano poi le altre. Essa è basata sull'atto del contare. Fondamentalmente possiamo dire che contare significa addizionare e che addizionando si conta.



si può procedere contando a uno a uno seguendo un percorso adatto, per esempio:



oppure operando una partizione comoda dell'insieme, per esempio:



4 + 4 = 8 3 + 3 + 2 = 8 (…)

La scomposizione additiva di un numero naturale (conseguenza del contare per partizione) è uno dei primi passi nell'apprendimento del calcolo mentale. Risulta utile anche per l'esecuzione di addizioni che comportano il passaggio della decina: in questo caso è importante l'acquisizione in forma di automatismo delle scomposizioni additive del numero 10.

1 + 9 2 + 8 3 + 7 4 + 6 5 + 5 6 + 4 7 + 3 8 + 2 9 + 1

Allora, per esempio, 7 + 8 può essere eseguito così:

7 + 8 = 7 + (3 + 5) = (7 + 3) + 5 = 10 + 5 = 15

e continuando, sempre come esempi possibili di attività di apprendimento, possiamo proporre

17 + 38 = (10 + 30) + (7 + 8) = 40 + 10 + 5 = 55

517 + 438 = 500 + 400 + 17 + 38 = 900 + 55 = 955

617 + 738 = 600 + 700 + 17 + 38 = (600 + 400) + 300 + 17 + 38 = 1300 + 55 = 1355

Questa è una traccia sintetica di un possibile percorso di apprendimento dell'addizione mentale. Ora però vorrei spostare il discorso anche sulla convenienza di eseguire a mente i calcoli appena presentati. Diciamo che 7+8 si esegue più velocemente a mente, mentre 617+738 si esegue più speditamente con la calcolatrice. Ovviamente molto dipende dall'abilità dell'esecutore. Gli allievi si devono rendere conto che, progredendo nell'esercizio del calcolo mentale, aumentano le possibilità di essere competitivi rispetto al calcolo automatico.

L'allievo deve però trovare la necessaria motivazione che lo spinga a dedicarsi al calcolo mentale: perciò, specialmente all'inizio, occorre metterlo di fronte a casi vincenti. Poi, a mano a mano che aumentano l'abitudine e l'abilità, si allarga il campo dei casi favorevoli all'applicazione del calcolo mentale.

Ecco alcune situazioni vincenti:

a. Presenza di complementi alla decina o al centinaio:
uso delle proprietà associativa e commutativa

4 + 17 + 6 + 13 = (4 + 6) + (17 + 13) = 10 + 30 = 40

39 + 78 + 11 = (39 + 11) + 70 + 8 = 50 + 70 + 8 = 120 + 8 = 128

120 + 345 + 280 + 55 = (120 + 280) + (345 + 55) = 400 + 400 = 800

666 + 350 + 570 + 144 = (666 + 144) + 300 + 500 + 50 + 70 = 800 + 800 +120 = 1720

33 + 390 + 110 + 17 = (33 + 17) + (390 + 110) = 50 + 500 = 550

b. Presenza di addendi ripetuti:
uso delle proprietà associativa e commutativa

$$5 + 5 + 3 + 3 + 3 + 6 + 6 + 3 + 4 + 4 + 4 + 4 + 3 + 5 + 4 + 6 + 6 + 6 =$$
$$= 5 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 6 \cdot 5 + 4 \cdot 5 = 15 + 15 + 30 + 20 = 30 + 50 = 80$$

$$23 + 25 + 25 + 23 + 24 + 25 + 25 + 25 + 25 + 23 + 24 + 24 + 24 + 24 =$$
$$= 23 \cdot 3 + 25 \cdot 6 + 24 \cdot 5 = 69 + 150 + 100 = 69 + 250 = 319$$

c. Presenza di addendi opposti in Z:

$$(-4) + \boxed{(-1) + (-1)} + (-4) + \boxed{(+1) + (+1)} + (-1) + (+4) + (+4) + (+4) + (+4) =$$

$$= (-1) + (+8) = +7$$

d) Addendi «vicini»

$$607 + 606 + 605 + 606 = 600 \cdot 4 + 7 + 6 + 5 + 6 = 2400 + 24 = 2424$$

$$0{,}99 + 1{,}03 + 0{,}98 + 1{,}00 + 0{,}96 + 1{,}02 = 6 - 0{,}01 + 0{,}03 - 0{,}02 - 0{,}04 + 0{,}02 = 6 - 0{,}02 = 5{,}98$$

Ovviamente più tecniche possono anche essere combinate in uno stesso calcolo: è solo questione di abilità e di allenamento. Ogni allievo diventa padrone di una o più tecniche, a diversi livelli di abilità, ma soprattutto ciascuno userà i metodi più congeniali al proprio modo di pensare e di «vedere». L'elenco presentato non ha la pretesa di essere esaustivo: ciascuno potrà fabbricarsi tecniche proprie, del tutto originali (purché corrette), o combinazioni di tecniche diverse.

1.2.2. La sottrazione

La scomposizione additiva vista per l'addizione è applicabile anche in questo caso. Vi sono due tecniche fondamentali per eseguire mentalmente una sottrazione. Vediamo la prima:

$$73 - 17 = (73 - 10) - 7 = 63 - 7 = (63 - 3) - 4 = 60 - 4 = 56$$

$$186 - 38 = (186 - 30) - 8 = 156 - 8 = (156 - 6) - 2 = 150 - 2 = 148$$

La seconda tecnica si basa sul fatto che se $x - y = z$, allora $y + z = x$, per cui l'esecuzione della sottrazione può anche essere eseguita «contando» da y fino a x.

Esempi:

Per calcolare 73 – 17 si può procedere così:

$$17 \xrightarrow{+3} 20 \xrightarrow{+50} 70 \xrightarrow{+3} 73 \Rightarrow \mathbf{73 - 17 = 3 + 50 + 3 = 56}$$

Per calcolare 186 – 38 si può procedere così:

$$38 \xrightarrow{+2} 40 \xrightarrow{+140} 180 \xrightarrow{+6} 186 \Rightarrow \mathbf{186 - 38 = 2 + 140 + 6 = 148}$$

1.2.3. La moltiplicazione

Nel calcolo mentale la moltiplicazione è un'addizione con gli addendi uguali fra loro. Così ad esempio

$$3 \cdot 7 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 21$$

a) Acquisizione dei prodotti in N entro il 100

Un punto importante è l'acquisizione, come automatismo, dei prodotti entro il 100 (con fattori da 1 a 10). La tabella a doppia entrata riportante tali prodotti si usa chiamare tavola pitagorica, per intenderci. Le singole moltiplicazioni, a scuola, sono dette anche «tabelline» o «caselline». Occorre sottolineare che un automatismo ben fondato non si raggiunge unicamente mediante studio mnemonico, ma partendo da un procedimento non automatizzato, applicato più volte, in situazioni diverse, eliminando a poco a poco passaggi ben acquisiti, fin che si arriva all'immediatezza, cioè alla memorizzazione di questi prodotti.

Così, ad esempio, il prodotto $7 \cdot 3$ all'inizio potrà essere trovato calcolando

$$7 \cdot 3 = 7 + 7 + 7$$

in un secondo tempo, conosciuto ormai il risultato di 7 + 7,

$$7 \cdot 3 = 14 + 7$$

ed infine, raggiunto l'automatismo, il prodotto 21 appare immediatamente:

$$7 \cdot 3 = 21$$

Per esperienza si sa che alcuni di questi prodotti si automatizzano facilmente, altri meno. Quando l'automatismo stenta a verificarsi, si può ricorrere ad altri metodi, conformemente a uno dei principi essenziali del calcolo mentale: cioè quello di arrangiarsi alla meno peggio. Così, ad esempio, se l'automatismo del prodotto $6 \cdot 7$ stentasse a realizzarsi si potrebbe ricorrere a una dinamica del tipo:

$$7 \cdot 6 = 7 \cdot (3 \cdot 2) = (7 \cdot 3) \cdot 2 = 21 \cdot 2 = 42$$

E così via.

A poco a poco, con la pratica del calcolo, l'attività di costruzione cosciente dei vari algoritmi lascia il posto alla memorizzazione e quindi si trasforma in automatismo.

b) Calcolo di prodotti oltre il 100: uso della proprietà distributiva

Per estendere oltre il 100 la capacità di calcolare prodotti, si ricorre alla proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione (o alla sottrazione). L'importanza di questa proprietà è talmente evidente che la stessa potrebbe essere indicata come vero perno dell'intero calcolo (e non solo mentale).

Ecco una serie di esempi graduati che ha lo scopo di indicare una delle possibili strade che portano verso l'estensione del calcolo mentale.

$17 \cdot 4 = \mathbf{(10 + 7) \cdot 4 = 10 \cdot 4 + 7 \cdot 4} = 40 + 28 = 68$
$26 \cdot 8 = \mathbf{(20 + 6) \cdot 8 = 20 \cdot 8 + 6 \cdot 8} = 160 + 48 = 208$
$7 \cdot 36 = \mathbf{7 \cdot (30 + 6) = 7 \cdot 30 + 7 \cdot 6} = 210 + 42 = 252$
$42 \cdot 14 = \mathbf{42 \cdot (10 + 4) = 42 \cdot 10 + 42 \cdot 4} = 420 + 168 = 420 + 160 + 8 = 580 + 8 = 588$

oppure:

$42 \cdot 14 = \mathbf{(40 + 2) \cdot 14 = 40 \cdot 14 + 2 \cdot 14} = 560 + 28 = 588$
$53 \cdot 36 = \mathbf{53 \cdot (30+6) = 53 \cdot 30 + 53 \cdot 6} = 1590 + 318 = 1590 + 310 + 8 = 1908$
$45 \cdot 19 = \mathbf{45 \cdot (20 - 1) = 45 \cdot 20 - 45 \cdot 1} = 900 - 45 = 855$
$73 \cdot 29 = \mathbf{73 \cdot (30 - 1) = 2190 - 73} = 2117$

c) Presenza di complementi alla decina, al centinaio o al migliaio:
uso delle proprietà associativa e commutativa

Come abbiamo visto per l'addizione, anche nel caso della moltiplicazione è molto utile conoscere i prodotti di fattori naturali che danno una potenza di 10. Ci limitiamo alle prime tre potenze, sottintendiamo la proprietà commutativa e tralasciamo i fattori che a loro volta sono potenze di 10:

$2 \cdot 5 = 10$
$2 \cdot 50 = 4 \cdot 25 = 100$
$2 \cdot 500 = 4 \cdot 250 = 8 \cdot 125 = 16 \cdot 25 = 1000$

Ed ecco alcuni esempi di calcolo:

$17 \cdot 2 \cdot 5 = 17 \cdot (2 \cdot 5) = 17 \cdot 10 = 170$
$4 \cdot 38 \cdot 25 = (4 \cdot 25) \cdot 38 = 3800$
$50 \cdot 233 \cdot 6 = (50 \cdot 2) \cdot 223 \cdot 3 = 100 \cdot 669 = 66900$
$8 \cdot 189 \cdot 125 = (8 \cdot 125) \cdot 189 = 1000 \cdot 189 = 189000$
$16 \cdot 196 \cdot 25 = (16 \cdot 25) \cdot 196 = 1000 \cdot 196 = 196000$

d) Calcolo di prodotti non interi

Come già detto, il calcolo mentale nasce e si sviluppa con i numeri interi, ma si può estendere facilmente anche ai casi in cui non tutti i fattori sono interi.

Per esempio:

se $17 \cdot 4 = 68$ allora $1{,}7 \cdot 4 = 6{,}8$ $1{,}7 \cdot 0{,}4 = 0{,}68$

se $53 \cdot 36 = 1908$ allora $0{,}53 \cdot 36 = 19{,}08$ $0{,}53 \cdot 0{,}36 = 0{,}1908$

Altri esempi:

$2{,}5 \cdot 0{,}4 = (25 \cdot 4) : 100 = 100 : 100 = 1$

$1{,}25 \cdot 80 = (125 \cdot 80) : 100 = 10000 : 100 = 100$

oppure:

$1{,}25 \cdot 80 = (1 + 0{,}25) \cdot 80 = 80 + 20 = 100$

e) Calcolo di numeri quadrati

Un buon calcolatore mentale, oltre che aver acquisito i quadrati dei numeri naturali da 1 a 10, ne conosce qualcuno dei numeri oltre il 10. Non già perché un bel giorno si è messo a studiare a memoria, ma perché, li ha incontrati parecchie volte e li ha memorizzati a poco a poco, ritenendoli interessanti, curiosi, utili.

Vediamo qualche esempio:

$11^2 = 121$

$12^2 = 144$ siccome $12 = 2 \cdot 6$ allora $144 = 4 \cdot 36$

siccome $12 = 3 \cdot 4$ allora $144 = 9 \cdot 16$

$13^2 = 169$

$14^2 = 196$ siccome $14 = 2 \cdot 7$ allora $196 = 4 \cdot 49$

$15^2 = 225$ siccome $15 = 3 \cdot 5$ allora $225 = 9 \cdot 25$

$16^2 = 256$ siccome $16 = 2 \cdot 8$ allora $256 = 4 \cdot 64$

siccome $16 = 2^4$ allora $2^8 = 256$; $2^9 = 512$; $2^{10} = 1024$

$17^2 = 289$

$18^2 = 324$ siccome $18 = 2 \cdot 9$ allora $324 = 4 \cdot 81$

siccome $18 = 3 \cdot 6$ allora $324 = 9 \cdot 36$

$19^2 = 361$

$20^2 = 400$ siccome $20 = 4 \cdot 5$ allora $400 = 16 \cdot 25$

$25^2 = 625$ siccome $25 = 5^2$ allora $625 = 5^4$

In altri casi può essere utile usare il metodo per il calcolo del quadrato di un binomio:

$$41^2 = (40+1)^2 = 1600 + 2 \cdot 40 \cdot 1 + 1^2 = 1600 + 80 + 1 = 1681$$

$$79^2 = (80-1)^2 = 6400 - 2 \cdot 80 \cdot 1 + 1 = 6241$$

1.2.4. La divisione

1.2.4.1. Divisioni senza resto

a) Con divisore di una sola cifra

Esempio 1: divisione entro il 100

Da $42 = 6 \cdot 7$ seguono $\begin{cases} 42 : 6 = 7 \\ 42 : 7 = 6 \end{cases}$

Di conseguenza per eseguire questo tipo di divisione occorre conoscere bene i prodotti in **N** entro il 100, capacità necessaria anche per poter eseguire mentalmente moltiplicazioni.

Esempio 2: divisioni oltre il 100

L'estensione avviene principalmente in virtù della distributività della divisione rispetto all'addizione e alla sottrazione. Ma la difficoltà maggiore consiste nell'eseguire opportunamente la scomposizione additiva del dividendo. Se il divisore è d, conviene dapprima individuare il più grande multiplo di 10 d minore del dividendo.

$112 : 8 = (80 + 32) : 8 = 80 : 8 + 32 : 8 = 10 + 4 = 14$
$301 : 7 = (280 + 21) : 7 = 280 : 7 + 21 : 7 = 40 + 3 = 43$
$819 : 9 = (810 + 9) : 9 = 810 : 9 + 9 : 9 = 90 + 1 = 91$

Esempio 3: dividere per 2^n

$448 : 2 = 224$
$448 : 4 = (448 : 2) : 2 = 224 : 2 = 112$
$448 : 8 = [(448 : 2) : 2] : 2 = [224 : 2] : 2 = 112 : 2 = 56$

b) Con divisore avente due cifre

Esempio 1: dividere per $d = a \cdot b$

$390 : 15 = (390 : 5) : 3 = [(350 + 40) : 5] : 3 = [350 : 5 + 40 : 5] : 3 = 78 : 3 = (60 + 18) : 3 = 26$
$612 : 18 = (612 : 2) : 9 = 306 : 9 = (270 + 36) : 9 = 270 : 9 + 36 : 9 = 34$

Esempio 2

$845 : 65 = ?$

Si tratta di «contare» quante volte il 65 è contenuto in 845. Si può procedere sottraendo a 845 più volte il 65 o suoi multipli (per esempio 130=65·2 oppure 260=65·4, ecc.), fino ad arrivare a 0. Il quoto è allora il numero di volte che è stato sottratto il 65.

$$845 \xrightarrow{-\mathbf{10} \cdot 65} 195 \xrightarrow{-\mathbf{3} \cdot 65} 0 \Rightarrow 845 : 65 = \mathbf{10} + \mathbf{3} = 13$$

6498 : 57 = ?

$$6498 \xrightarrow{-\mathbf{100} \cdot 57} 798 \xrightarrow{-\mathbf{10} \cdot 57} 228 \xrightarrow{-\mathbf{4} \cdot 57} 0 \quad 6498 : 57 = \mathbf{100} + \mathbf{10} + \mathbf{4} = 114$$

c) *Con divisore avente più di due cifre*

Esempio
10488 : 437 = ?

$$10488 \xrightarrow{-\mathbf{20} \cdot 437} 1748 \xrightarrow{-\mathbf{4} \cdot 437} 0 \Rightarrow 6498 : 57 = \mathbf{20} + \mathbf{4} = 24$$

Ovviamente qui siamo al limite delle possibilità di un allievo di scuola media. Niente paura: quando il calcolo mentale richiede sforzi troppo intensi, si ha il diritto di rinunciare e di usare la calcolatrice.

1.2.4.2. Divisioni con resto

Si eseguono nello stesso modo di quelle senza resto. L'unica differenza consiste nel fatto che in questo caso il dividendo non può essere scomposto, fino in fondo, in multipli del divisore.

Esempio 1

823 : 9 = (810 + 13) : 9 = 810 : 9 + 13 : 9 = 90 + (9 + 4): 9 =
= 90 + 9 : 9 + 4 : 9 = 91 con resto 4

Esempio 2

$$871 \xrightarrow{-\mathbf{10} \cdot 65} 221 \xrightarrow{-\mathbf{3} \cdot 65} 26 < 65 \Rightarrow 871 : 65 = \mathbf{10} + \mathbf{3} + \mathbf{26 : 65} = 13 \text{ con resto } 26$$

Nei due esempi si nota che il metodo di calcolo è lo stesso usato in precedenza, ma che alla fine si ottengono delle divisioni del tipo (a : b) con r<b. Il numero r è il resto della divisione.

1.2.4.3. Divisioni con numeri decimali

In questi casi si usa la proprietà invariantiva della divisione, cioè si moltiplicano dividendo e divisore per uno stesso numero, tenendo conto che questa modifica non influisce sul risultato. Seguendo la nota tecnica impiegata anche nel calcolo in colonna, si moltiplica per una conveniente potenza di 10 in modo da rendere intero almeno il divisore. Poi si procede come visto in precedenza.

Esempio 1

$39 : 1{,}5 = 390 : 15 = \ldots = 26$

Esempio 2

$64{,}98 : 5{,}7 = 6498 : 570$

$6498 \xrightarrow{-\mathbf{10}\cdot 570} 798 \xrightarrow{-\mathbf{1}\cdot 570} 228 \Longrightarrow 6498:570 = \mathbf{10}\mathbf{+1+}\, 228:\mathbf{570} = 11$ con resto 228

Ma si può continuare e calcolare i decimi:

$2280 : 570 = 4$ (decimi)

In totale si ha:

$64{,}98 : 5{,}7 = 11 + 0{,}4 = 11{,}4$

L'ultimo calcolo richiede già una certa abilità, ma, come già detto, ciascuno arriverà… dove potrà: in aiuto c'è sempre una comoda calcolatrice.